MATEMÁTICAS 2º bachillerato Temas 10 y 11 – 4 abril 2017

NOMBRE Y APELLIDOS BUSSONS

Puntuación: 2 + 3 + 2

$R(2,3,-1)$ $\vec{u}_r(5,1,2)$ $\quad S(1,3,2)$ $\vec{u}_s(1,-1,0)$

1. a) Estudiar la posición relativa de las rectas $r \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$, $s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = 2 \end{cases}$.

$M \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = M^*$; $\vec{RS} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; $|M^*| = 20 \neq 0$

$r(M^*) = 3$

$r(M) = 2$ porque $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow$ Dos rectas que se cruzan.

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .

Plano definido por $R, \vec{u}_r, \vec{u}_s$:

$\begin{cases} x = 2+5\lambda+\mu \\ y = 3+\lambda-\mu \\ z = -1+2\lambda \end{cases}$ ecs. paramétricas ;

$\vec{n} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = (2,2,-6)$, también vale $(1,1,-3)$

Ecuación implícita: $x+y-3z+D=0$

usando punto R: $2+3+3+D=0 \to D=-8$

$\Rightarrow \boxed{x+y-3z-8=0}$

2. Dados los puntos $A(2,1,1)$, $B(0,0,-3)$, $C(1,1,1)$, $P(0,1,0)$:

a) Hallar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos. A, B, C

plano definido por:

$\vec{CA}(1,0,0)$, $\vec{BA}(2,1,4)$, $C(1,1,1)$

$\begin{cases} x = 1+\lambda+2\mu \\ y = 1 \quad +\mu \\ z = 1 \quad +4\mu \end{cases}$ ecuaciones paramétricas ;

$\vec{n} = \vec{CA} \times \vec{BA} = (0,-4,1)$

ec. implícita: $-4y+z+D=0$

$-4+1+D=0 \to D=3$

$\boxed{-4y+z+3=0}$

b) Hallar el área del triángulo formado por A, B y C.

área $S = \frac{1}{2} \left| \vec{BA} \times \vec{CA} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{16+1} = \frac{\sqrt{17}}{2}\ u^2$

c) Verificar si los cuatro puntos son coplanarios: en el caso de que lo sean, hallar el área del paralelogramo que se puede formar a partir de B, C y P ; en caso contrario, hallar el volumen del tetraedro que forman los cuatro puntos.

$\vec{PA}(2,0,1)$

Calculo el producto mixto $[\vec{PA}, \vec{CA}, \vec{BA}] = \vec{PA} \cdot \vec{n} = (2,0,1) \cdot (0,-4,1) = 1$

Por ser distinto de cero, no son coplanarios

y el volumen del tetraedro pedido es $V = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}\ u^3$

3. Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x+4y+z-8=0$, $\pi_2 \equiv x+2y+\frac{z}{2}-2=0$:

a) Hallar los puntos de intersección de π_1 con los ejes coordenados.

Eje X: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ ecs. implícitas

Intersección con π_1: resuelvo sistema

$\left.\begin{matrix} 2x+4y+z-8=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x-8=0 \Rightarrow x=4$

Punto de intersección: $(4,0,0)$ con eje X

De la misma forma:

eje Y: $4y-8=0$; $y=2$; intersecá $(Y, \pi_1) = (0,2,0)$

eje Z: $z=8 \to$ punto $(0,0,8)$ intersecá con eje Z.

b) Estudiar la posición relativa de los dos planos.

$\vec{n}_1$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = M$; rango $(M) = 1$ son filas proporcionales

$\Rightarrow$ planos paralelos o coincidentes

$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{1}{1/2} \neq \frac{-8}{-2}$ son paralelos

También puedo elegir un punto de π_1, por ejemplo $(0,2,0)$ y ver si pertenece a π_2

$0+2\cdot 2+0-2 \neq 0$. No pertenece, luego no son coincidentes